



DÖNEN DİSKLERİN SERBEST TİTREŞİMLERİ

Mertol Tüfekci¹, Hilal Koç², Ömer Ekim Genel³, Olcay Oldaç⁴, Ekrem Tüfekci⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi,
Gümüşsuyu, 34437, İstanbul

ABSTRACT

With the help of advancing technology, rotating discs which are used in many industrial fields occupy wider application areas that require speed day by day. Vibrations of these discs which are used from informatics to automotive industry are one of the profound topics of engineering discipline. In literature, most of analytical studies about rotating discs are based on Rayleigh-Ritz and Galerkin method. In this paper, free vibrations of rotating discs are investigated using Galerkin method. Also, problem is formulated for different boundary conditions in order to be able to understand vibrational characteristics of structure. Results are presented in Campbell diagrams.

ÖZET

Endüstride bir çok alanda kullanılan dönen diskler, gelişen teknolojiyle beraber yüksek hız gerektiren mühendislik uygulamalarında kendilerine gittikçe daha geniş yer bulmaktadırlar. Bilişim sektöründen otomotiv sektörüne kadar kullanılan bu disklerin titreşimleri günümüz mühendislik birikiminin önemli bir alanını oluşturmaktadır. Literatürde dönen diskleri için analitik olarak yapılan çalışmaların birçoğu Rayleigh-Ritz ve Galerkin metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma kapsamında da, dönen disklerin serbest titreşimleri, Galerkin metodu kullanılarak incelenmiştir. Ayrıca, farklı sınır şartları için de formülasyonlar yapılarak yapının titreşim karakteristiği incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar Campbell diyagramları kullanılarak açıklanmıştır.

GİRİŞ

Duran ve dönen disklerle ilgili çalışmalar oldukça eskiye dayanmaktadır. Teknolojideki ilerlemelerle daha yüksek hızda dönen disklerde ortaya çıkan titreşimler günümüzde oldukça geniş bir araştırma alanının oluşmasını sağlamıştır. Türbinler, yüksek hızlarda çalışan fanlar, dişliler, tren tekerlekleri dönen disklerin uygulaması olarak verilebilecek akla ilk gelen örneklerdir. Ayrıca, otomotiv endüstrisindeki güncel konulardan birisi olan fren diski kaynaklı gürültü problemi de dönen disklerin titreşimiyle yakından ilişkilidir. Son yıllarda bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler doğrultusunda, disklerle ilgili çalışmaların bilgi depolama endüstrisi yönüne doğru kaydığı gözlenmektedir. Özellikle hard-diskler çok yüksek hızlarda döndüğünden dolayı, okuyucu-yazıcı kafa ve disk arasındaki temas, diskin dönüş sırasında oluşturduğu titreşimlerden etkilenebilmekte ve bu etkileşim hard diskin bozulmasına sebep olabilmektedir.

Dönen disklerin titreşiminin incelendiği ilk çalışmalar Lamb ve Southwell[1] tarafından yapılmıştır. Lineer teori çerçevesinde eğilme rijitliği ihmal edilerek yapılan bu çalışmayı daha

sonra iç çevrede ankastre, dış çevrede ise serbest sınır şartlarını kullanarak Southwell'in[2] sunduğu diğer çalışma takip etmiştir. Dönen disklerde lineer olmayan titreşimleri inceleyen ilk çalışma ise Nowinski[3] tarafından sunulmuştur. Mote[4] kalınlığı değişen, iç yüzeyi ankastre mesnetlenmiş diskler için; Ramaiah[5] ve Bashmal[6] ise farklı sınır şartlarını için Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak doğal frekansları belirlemişlerdir. Ayrıca, Koo[7] yine bu yöntemi kullanarak kompozit disklerin doğal frekanslarını hesaplamıştır. Varyasyonel bir yaklaşım olan Rayleigh-Ritz metodunun yanında Galerkin metodunu kullanarak da dönen disklerin doğal frekansları incelenmiştir. Pei ve Tan[8], dönen disklerde modal etkileşimleri incelerken Galerkin metodundan yararlanmıştır. Son yıllarda, Mignolet ve diğerleri[9] ortası dolu ve delik disklerin serbest titreşimlerinin araştırılmasında pertürbasyon tekniklerini kullanmışlardır. Nayfeh ve diğerleri[10] ise çok ölçekli yaklaşım kullanarak hem lineer hem de lineer olmayan titreşimleri incelemişlerdir.

Bu çalışmada, dönen disklerin serbest titreşim karakteristiklerinin belirlenmesinde Galerkin yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde, çözüm için sınır şartlarını sağlayan yaklaşık fonksiyon seçilerek hareketin diferansiyel denkleminde yerine konmuştur. Farklı sınır şartlarındaki dönen disklerin serbest titreşimleri incelenmiştir.

DENKLEMLER ve FORMÜLASYON

(r, φ) diske bağlı koordinatlar, (r, ψ) uzaydaki sabit koordinatlar, Ω diskin dönüş hızı olmak üzere, diske bağlı koordinatlarda dönen diskin titreşiminin diferansiyel denklemi aşağıdaki formdadır ;

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{h}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_r r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \sigma_\varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right] = 0 \quad (1)$$

Burada, w diskin düşey yer değiştirmesi, D diskin eğilme rijidliği, E disk malzemesinin Young modülü, ν disk malzemesinin Poisson oranı, σ_r ve σ_φ diskin dönmesinden kaynaklanan radyal ve teğetsel gerilmelerdir ve bu gerilmeler diskin sınır şartlarına bağlı olarak değişmektedir.

Sabit koordinat sistemine göre diskin düşey yer değiştirme fonksiyonu aşağıdaki formdadır;

$$w = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M a_{mn} R_{mn}(r) \sin[n\varphi + (n\Omega - \omega)t] \quad (2)$$

GALERKİN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜM

Çözüm için Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Bunun için, sınır şartlarını sağlayan bir yaklaşık çözüm fonksiyonu önerilmelidir. Sınır şartlarını sağlayan aşağıdaki fonksiyon seçilebilir:

$$R_{mn}(r) = X_{mn}^1 r^m + X_{mn}^2 r^{m+1} + X_{mn}^3 r^{m+2} + X_{mn}^4 r^{m+3} + X_{mn}^5 r^{m+4} \quad (3)$$

$X_{mn}^1, X_{mn}^2, X_{mn}^3, X_{mn}^4, X_{mn}^5$ bilinmeyen sabitlerdir ve diskin sınır şartları ve normalizasyon şartı kullanılarak hesaplanacaktır. Üst indisler ise değişken isimlerini belirlemektedirler.

$R_{mn}(r)$ sırasıyla (2) ve (1) denklemlerinde yerine konursa,

$$\sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^N \left\{ D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right)^2 R_{mn}(r) - \rho h (n\Omega - \omega)^2 R_{mn}(r) - \frac{h}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(\sigma_r r \frac{dR_{mn}(r)}{dr} \right) - \frac{n^2}{r} \sigma_\varphi R_{mn}(r) \right] \right\} \cdot a_{mn} \cdot \sin[n\varphi + (n\Omega - \omega)t] = 0 \quad (4)$$

elde edilir.

Burada, n in her değeri için, $\sin[n\varphi + (n\Omega - \omega)t]$ teriminin sıfıra eşit olması gerekmez. Bu eşitliğin sağlanması için, sinüslü terimin çarpanı olan parantez içindeki ifadenin sıfır olması gereklidir.

$$\left\{ D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right)^2 R_{mn}(r) - \rho h (n\Omega - \omega)^2 R_{mn}(r) - \frac{h}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(\sigma_r r \frac{dR_{mn}(r)}{dr} \right) - \frac{n^2}{r} \sigma_\varphi R_{mn}(r) \right] \right\} \cdot a_{mn} = 0 \quad (5)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N$

denklemleri elde edilir. Bu kalandır ve ağırlıklı kalan sıfıra eşit olmalıdır. Buradan;

$$\int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \left\{ D \left(\frac{\partial^4 R_{mn}(r)}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 R_{mn}(r)}{\partial r^3} - \frac{2n^2 + 1}{r^2} \frac{\partial^2 R_{mn}(r)}{\partial r^2} + \frac{2n^2 + 1}{r^3} \frac{\partial R_{mn}(r)}{\partial r} + \frac{n^4 - 4n^2}{r^4} R_{mn}(r) \right) - \rho h (n\Omega - \omega)^2 R_{mn}(r) - \frac{h}{r} \left[\sigma_r r \frac{\partial^2 R_{mn}(r)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r + \sigma_r \right) \frac{\partial R_{mn}(r)}{\partial r} - \frac{n^2}{r} \sigma_\varphi R_{mn}(r) \right] \right\} a_{mn} a_{sn} R_{sn}(r) \sin[n\varphi + (n\Omega - \omega)t] r dr d\varphi = 0 \quad (6)$$

$s = 0, 1, 2, \dots, M$

ifadesi bulunur. Burada sadece sinüs fonksiyonu φ koordinatına bağlıdır. Bu nedenle bu ifadeye ait integralin sıfıra eşit olması gerekmez. Bu ifade düzenlenirse;

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \left\{ \frac{1}{\rho h} \int_{R_i}^{R_o} D \left(\frac{\partial^4 R_{mn}(r)}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 R_{mn}(r)}{\partial r^3} - \frac{2n^2 + 1}{r^2} \frac{\partial^2 R_{mn}(r)}{\partial r^2} + \frac{2n^2 + 1}{r^3} \frac{\partial R_{mn}(r)}{\partial r} + \frac{n^4 - 4n^2}{r^4} R_{mn}(r) \right) R_{sn}(r) r dr - \frac{1}{\rho h} \int_{R_i}^{R_o} h \left[\sigma_r r \frac{\partial^2 R_{mn}(r)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r + \sigma_r \right) \frac{\partial R_{mn}(r)}{\partial r} - \frac{n^2}{r} \sigma_\varphi R_{mn}(r) \right] R_{sn}(r) dr + (n\Omega - \omega)^2 \int_{R_i}^{R_o} R_{mn}(r) R_{sn}(r) r dr \right\} a_{mn} a_{sn} = 0 \quad (7)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadeyi daha basit bir hale getirmek için bazı kısaltmalar yapılarak aşağıdaki ifadeye ulaşılabilir:

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M [\phi_{smn} - (n\Omega - \omega)^2 \Gamma_{smn}] A_{smn} = 0 \quad (8)$$

(13) denkleminin determinantı sıfıra eşitlenerek doğal frekanslar elde edilir.

$$\det[\phi_{smn} - \lambda_{mn}^2 \Gamma_{smn}] = 0 ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N ; \quad \lambda_{mn} = n\Omega - \omega \quad (9)$$

Dönen diskin doğal frekansları;

$$\omega_{mn1,2} = n\Omega \pm \lambda_{mn} \quad (10)$$

denklemden elde edilir. Bu denklemden görüldüğü gibi her (m, n) değeri için dönmeyen bir diskin yalnızca bir tek frekans değeri vardır. Diskin dönmesi halinde, $n=0$ modu hariç, diğer tüm modlarda frekans iki farklı değere ayrılmaktadır. Dalgalardan biri dönüş yönünde ilerlerken, diğeri dönüş yönüne ters yönde ilerlemektedir.

Frekans ifadesini elde edebilmek için, $R_{mn}(r)$ fonksiyonunun belirlenmesi gereklidir. Bunun için diske ait sınır şartları kullanılacaktır. Yazılacak sınır şartları ifadesiyle, $R_{mn}(r)$ şekil fonksiyonunun $X_{mn}^1, X_{mn}^2, X_{mn}^3, X_{mn}^4, X_{mn}^5$ sabitleri kolayca belirlenecektir.

GERİLME DAĞILIMLARI VE SINIR ŞARTLARI

Bu çalışmada ankastre-ankastre, ankastre-serbest, serbest-serbest ve serbest-ankastre olmak üzere dört farklı gerilme dağılımları ve sınır koşulları ele alınmıştır.

İlk olarak Ankastre-Serbest sınır koşulları incelenmiştir.

Ankastre-Serbest sınır koşullarındaki gerilme dağılımları (10) denkleminde verilmiştir.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{(3+\nu)}{8} \rho \Omega^2 (R_o^2 - r^2) + \frac{\rho \Omega^2 R_i^2 (1-\nu) [R_o^2 (3+\nu) - R_i^2 (1+\nu)]}{8 [R_i^2 (1-\nu) + R_o^2 (1+\nu)]} \left(\frac{R_o^2}{r^2} - 1 \right) \\ \sigma_\phi &= \frac{\rho \Omega^2}{8} [R_o^2 (3+\nu) - r^2 (1+3\nu)] \\ &\quad - \frac{\rho \Omega^2 R_i^2 (1-\nu) [R_o^2 (3+\nu) - R_i^2 (1+\nu)]}{8 [R_i^2 (1-\nu) + R_o^2 (1+\nu)]} \left(\frac{R_o^2}{r^2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Disk iç çevre boyunca ankastre mesnetli, dış çevre boyunca serbesttir. İç çevrede ankastre mesnete ait sınır şartları;

* Ankastre mesnette çökme olmayacaktır:

$$w|_{r=R_i} = 0 \quad (11)$$

* Ankastre mesnette dönme açısı olmayacaktır:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=R_i} = 0 \quad (12)$$

Dış çevrede serbest kenar sınır şartları;

* Serbest kenarda moment değeri sıfır olacaktır:

$$m_r|_{r=R_o} = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) \right] \Big|_{r=R_o} = 0 \quad (13)$$

* Serbest kenarda eşdeğer kesme kuvveti değeri sıfır olacaktır:

$$V_r|_{r=R_o} = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{3-\nu}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{2-\nu}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_o} = 0 \quad (14)$$

* Normalizasyon şartı;

$$R_{mn}(R_o) = 1 \quad (15)$$

Benzer şekilde, diğer sınır şartlarındaki diskler için gerilme dağılımları ve sınır koşulları yazılarak $X_{mn}^1, X_{mn}^2, X_{mn}^3, X_{mn}^4, X_{mn}^5$ bilinmeyen sabit katsayıları cinsinden lineer denklem takımı oluştururlar.

Bu çözüm yöntemi kullanılarak, bir hard diskin boyutları ve malzemesi esas alınarak, doğal frekansları farklı sınır şartları için hesaplanmıştır. Kullanılan hard diskin iç ve dış çapları sırasıyla 32,5 mm ve 95 mm, kalınlığı ise 1,3 mm, elastisite modülü 66 Gpa ve Poisson oranı da 0.334 olarak belirlenmiştir.

İç çevrede ankastre, dış çevrede serbest olarak modellenen sınır şartları altında, yukarıda bahsedilen yaklaşımla analitik olarak hesaplanan doğal frekanslar değerleri, 0-4000-8000 dev/dk dönüş hızları için Çizelge 1’de verilmiştir. Burada İGD ve GGD kısaltmaları sırasıyla, ileri giden dalga ve geri giden dalgayı ifade etmektedir.

Çizelge 1. Ankastre-Serbest sınır şartları altında $m = 0, 1$ ve $n = 0, 1, 2$ için analitik olarak hesaplanan doğal frekanslar

Dönüş hızı [dev/dk]	Dalga tipi	$m = 0$			$m = 1$		
		$n = 0$ [Hz]	$n = 1$ [Hz]	$n = 2$ [Hz]	$n = 0$ [Hz]	$n = 1$ [Hz]	$n = 2$ [Hz]
0	-	1052.165	1044.769	1218.798	6755.932	7020.405	7839.045
4000	İGD	1055.11	1114.918	1356.449	6759.109	7090.275	7975.638
	GGD	1055.11	981.5843	1089.783	6759.109	6956.941	7708.971
8000	İGD	1063.892	1191.961	1502.645	6768.629	7166.542	8118.741
	GGD	1063.892	925.294	969.3117	6768.629	6899.875	7585.408

$m = 0$ için elde edilen analitik sonuçlar, Tufekci vd. [11] tarafından yapılan çalışmadaki sayısal (sonlu eleman yöntemi) ve deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Nodal dairenin bulunmadığı durum ($m = 0$) için [11]’deki sayısal ve deneysel sonuçlar Çizelge 2’de verilmiştir.

Çizelge 2. Ankastre-Serbest sınır şartları altında $m = 0$ ve $n = 1, 2, 3, 4$ için sayısal ve deneysel sonuçların karşılaştırılması

Dönüş hızı [dev/dk]	Dalga tipi	$m = 0$							
		Sayısal				Deneysel			
		$n = 0$ [Hz]	$n = 1$ [Hz]	$n = 2$ [Hz]	$n = 3$ [Hz]	$n = 1$ [Hz]	$n = 2$ [Hz]	$n = 3$ [Hz]	$n = 4$ [Hz]
0	-	1050,4	1041,5	1211,5	1878,1	1136	955	1232	1830
4000	İGD	1053,3	1108,2	1344,8	2078,1	1148	1009	1350	2032
	GGD	1053,3	974,8	1078,2	1678,1	1148	880	1101	1641
8000	İGD	1162,1	1174,8	1478,2	2278,1	1160	1077	1484	2245
	GGD	1162,1	908,2	944,8	1478,1	1160	820	971	1454

Ayrıca, Bashmal ve diğerleri tarafından sunulan çalışmada [12] 1920 dev/dk dönüş hızında 0,02 m iç çap ve 0,15 m dış çap boyutlarındaki alüminyum bir disk için doğal frekanslar 7,68 kHz ve 7,73 kHz olarak ölçülmüştür. İlgili geometrik boyutlar ve malzeme özellikleri kullanılarak yapılan hesaplar sonucunda doğal frekanslar 8290,9 Hz ve 8354,9 Hz olarak hesaplanmıştır.

Doğal frekanslar, farklı sınır şartları için de değişen dönüş hızlarında hesaplanmıştır. Ankastre-ankastre sınır şartları için elde edilen doğal frekans değerleri Çizelge 3'te verilmiştir.

Çizelge 3. Ankastre-Ankastre sınır şartları altında $m = 0, 1$ ve $n = 0, 1, 2$ için analitik olarak hesaplanan doğal frekanslar

Dönüş hızı [dev/dk]	Dalga tipi	$m = 0$			$m = 1$		
		$n = 0$ [Hz]	$n = 1$ [Hz]	$n = 2$ [Hz]	$n = 0$ [Hz]	$n = 1$ [Hz]	$n = 2$ [Hz]
0	-	7150.875	7320.706	7893.055	19761.65	20019.29	20814.76
4000	İGD	7151.074	7387.598	8026.679	19761.85	20086.16	20948.32
	GGD	7151.074	7254.265	7760.013	19761.85	19952.83	20681.66
8000	İGD	7151.671	7454.942	8160.886	19762.45	20153.46	21082.35
	GGD	7151.671	7188.275	7627.552	19762.45	19886.79	20549.02

Serbest-Ankastre sınır şartları için elde edilen sonuçlar Çizelge 4'te verilmiştir.

Çizelge 4. Serbest-Ankastre sınır şartları altında $m = 0, 1$ ve $n = 0, 1, 2$ için analitik olarak hesaplanan doğal frekanslar

Dönüş hızı [dev/dk]	Dalga tipi	$m = 0$			$m = 1$		
		$n = 0$ [Hz]	$n = 1$ [Hz]	$n = 2$ [Hz]	$n=0$ [Hz]	$n = 1$ [Hz]	$n = 2$ [Hz]
0	-	1679.914	2667.667	4448.175	7932.721	8817.059	11125.77
4000	İGD	1678.962	2536.523	4163.917	7933.075	8834.407	11093.04
	GGD	1678.962	2403.19	3897.25	7933.075	8701.073	10826.37
8000	İGD	1676.105	1873.754	2589.091	7934.137	8752.489	10720.42
	GGD	1676.105	1607.087	2055.757	7934.137	8485.823	10187.08

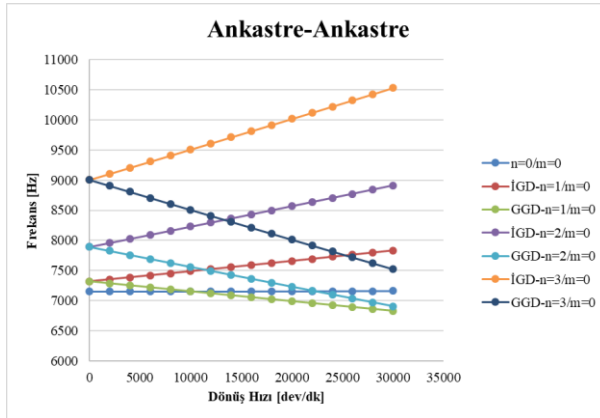
Serbest-Serbest sınır şartları için elde edilen sonuçlar Çizelge 5'te verilmiştir.

Çizelge 5. Serbest- Serbest sınır şartları altında $m = 0, 1$ ve $n = 0, 1, 2$ için analitik olarak hesaplanan doğal frekanslar

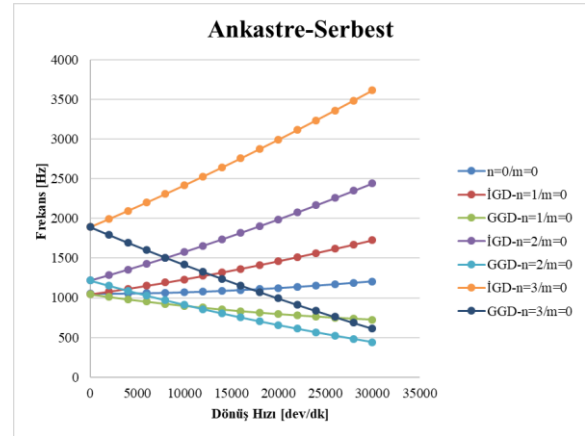
Dönüş hızı [dev/dk]	Dalga tipi	$m = 0$					$m = 1$
		$n = 0$ [Hz]	$n = 1$ [Hz]	$n = 2$ [Hz]	$n = 3$ [Hz]	$n = 4$ [Hz]	$n = 2$ [Hz]
0	-	0	0	654.4294	6958.458	9915.654	1164.092
4000	İGD	0	126.1176	797.3244	7163.814	10187.59	1171.715
	GGD	0	7.21574	530.6577	6763.814	9654.256	1171.715
8000	İGD	0	252.2428	958.5399	7379.841	10470.03	1194.285
	GGD	0	14.42388	425.2066	6579.841	9403.364	1194.285

BULGULAR (CAMPBELL DİYAGRAMLARI)

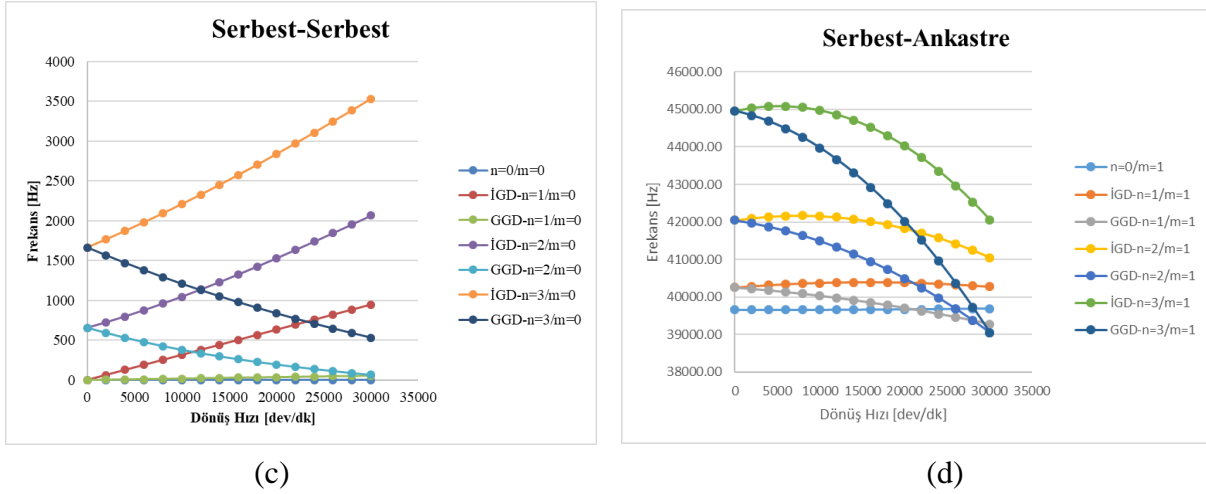
Yukarıda verilen çözüm yöntemi sonucunda çeşitli açısal hızlarda dönen diskin serbest titreşimlerinin doğal frekansları hesaplanmıştır. Frekanslar MATLAB paket programında yazılan bir kodla elde edilmiş ve elde edilen bu frekans değerleri kullanılarak Campbell diyagramları çizdirilmiştir. Nodal daire (m) ve nodal çap (n)'in çeşitli değerleri için farklı açısal hız değerlerinde elde edilen Campbell diyagramları Şekil 1'deki grafiklerde gösterilmektedir.



(a)



(b)

Şekil 1. $m=0$ ve $n=0, 1, 2, 3$ için Campbell Diyagramı

Şekillerde görüldüğü gibi, $n=0$ modu hariç, diğer tüm modlarda frekans iki farklı değere ayrılmaktadır. Bu modlara gezinen modlar denir.

Dalgalardan biri dönüş yönünde ilerlerken, diğeri dönüş yönüne ters yönde ilerlemektedir. Dönüş yönünde hareket eden dalgaya ileri doğru hareket eden dalga, dönüş yönünün tersinde hareket eden dalgaya geriye doğru hareket eden dalga adı verilmektedir. $n=0$ modunda herhangi bir nodal çap bulunmadığından, ileri veya geriye doğru hareket eden dalga olmayacaktır. Bu nedenle, bu mod dışında, her dönme hızı değerinde, her moda ait iki frekans değeri elde edilmektedir.

Dönme hızına bağlı olarak titreşim frekansları elde edilmiş ve bu değerlerle Campbell diyagramları çizilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] H. Lamb and R. V. Southwell, "The vibrations of a spinning disk," *Proceedings of the Royal Society, Series A*, vol. 99, pp. 272-280, 1921.
- [2] R. V. Southwell, "On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its center, and on the effects of rotation," *Proceeding of the Royal Society, Series A*, vol. 101, p. 133, 1922.
- [3] J. L. Nowinski, "Nonlinear transverse vibrations of a spinning disk," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 31, Trans. ASME, Vol. 86, Series E, pp. 72-78, 1964.
- [4] C. D. Mote, "Free Vibration of Initially Stressed Circular Disc", Trans. ASME, *Journal of Engineering for Industry*, May, pp.258-264, 1965.
- [5] G. K. Ramaiah, "Natural frequencies of spinning annular plates", *Journal of Sound and Vibration*, Volume 74, Issue 2, Pages 303-310, 1981.
- [6] S. Bashmal, "In-plane free vibration of circular annular disks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 322, pp. 216-226, 2009.
- [7] K. N. Koo, "Vibration analysis and critical speeds of polar orthotropic annular disks in rotation", *Composite Structures*, Vol. 76, pp 67-72, 2006.
- [8] Y. C. Pei., Q. C. Tan, "Modal interactions of rotating flexible disc," *Proc. ImechE, Part C: J. Mechanical Engineering Science*, vol. 223, no. 4, pp. 851-857, 2009.
- [9] M. P. Mignolet, C. D. Eick and M. V. Harish, "Free vibration of flexible rotating disks," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 196, no. 5, pp. 537-577, 1996.

- [10] A. H. Nayfeh, A. Jilani and P. Manzione, “Transverse vibrations of a centrally clamped rotating circular disk,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 26, pp. 163–178, 2001
- [11] M. Tufekci, O. E. Genel and O. Oldac, “Finite element and experimental analysis of vibrations of a rotating disc”, in *Tokyo 18th International Conference on “Engineering & Technology, Computer, Basic & Applied Sciences” (ECBA- 2017)*, July 25-26, 2017.
- [12] S. Bashmal, R. Bhat and S. Rakheja, “Experimental and numerical study of the vibration of stationary and rotating annular disks,” *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 138 pp. 051003-1-11, 2016.